

# KRÓTKOTERMINOWE PROGNOZOWANIE WIELKOŚCI UDZIAŁU KOMPONENTÓW USZKODZONYCH W PRODUKCJI CAŁKOWITEJ Z WYKORZYSTANIEM KLASYCZNYCH METOD PREDYKCJI

WOJCIECH WOŹNIAK, JERZY MIKULIK

Streszczenie

*W pracy zaprezentowano wyniki badań polegających na doborze odpowiedniej metody do prognozowania wielkości udziału komponentów uszkodzonych w produkcji całkowitej w wybranym przedsiębiorstwie produkcyjnym. Wykorzystując metodę naiwną, metody średniej ruchomej oraz metody wykładniczego zbudowano modele prognostyczne oraz porównano je ze sobą wg wybranych kryteriów.*

**Słowa kluczowe:** analiza błędów, niezawodność, prognozowanie

## Wprowadzenie

Istnieje wiele definicji pojęć prognoza czy prognozowanie. A. Zeliaś przyjmuje, że prognoza „to wybór – w ramach danego układu – najbardziej prawdopodobnej drogi rozwoju wyróżnionego zjawiska ekonomicznego w nadchodzącym czasie, przy czym podstawę tego wyboru stanowi dotychczasowy przebieg tego zjawiska i aktualny stan układu” [13, s. 15]. Definicja prognozowania, zaczerpnięta z pracy M. Cieślak mówi, że jest to po prostu „wnioskowanie o zdarzeniach nieznanych na podstawie zdarzeń znanych” [4, s. 15], jednak największe uproszczenie można znaleźć w pracy C. Bozarth oraz R. B. Handfielda [2, s. 321] – wg tych autorów „prognoza to szacunkowe określenie poziomu danej zmiennej”. Proces prognozowania przebiega według schematu opisanego w kolejnym akapicie.

Pierwszym etapem jest sformułowanie zadania prognostycznego – należy określić prognozowane zjawisko oraz cel budowy prognozy. W kolejnym etapie badamy czynniki wpływające na zmiany tego zjawiska. Etap trzeci to zebranie danych statystycznych oraz ich obróbka i analiza. W etapie czwartym należy wybrać odpowiednią metodę prognozowania, a następnie – w etapie piątym – w oparciu o tę wybraną metodę zbudować model prognostyczny i wyznaczyć prognozę. Szóstym etapem jest ocena jakości rozwiązania – należy sprawdzić czy uzyskana prognoza daje dopuszczalne rezultaty. W sytuacji, gdy prognoza jest prognozą dopuszczalną następuje jej zastosowanie w praktyce. Ostatni etap polega na ocenie trafności prognozy [5, s. 22–35].

## 1. Metody prognozowania

Istnieje wiele metod prognozowania, które mają zastosowanie do różnej klasy szeregów czasowych. Jako najbardziej fundamentalne można wymienić metody naiwne, metody średniej ruchomej oraz metody wykładniczego.

**Modele naiwne**, jak napisano w pracy M. Cieślak [4, s. 67–70] oparte są na prostym założeniu braku istotnych zmian poziomu zmiennej prognozowanej w najbliższym czasie (równanie 1):

$$y_t^* = y_{t-1} \quad (1)$$

gdzie:

$y_t^*$  – prognoza zmiennej  $y$  wyznaczona na okres  $t$ ,

$y_{t-1}$  – wartość zmiennej  $y$  w okresie  $t-1$ ,

W przypadku szeregów czasowych odznaczających się sezonowością można zastosować metodę opisaną wzorem 2:

$$y_t^* = y_{t-r} \quad (2)$$

gdzie:

$y_{t-r}$  – wartość zmiennej  $y$  w odpowiadającej fazie cyklu poprzedniego okresu,

$r$  – liczba faz cyklu.

Drugą grupę modeli prognostycznych stanowią **modele ARIMA i SARIMA**, które szczegółowo zostały omówione przez G. E. P. Boxa oraz G. M. Jenkinsa [1]. Są to tzw. modele autoregresji AR i średniej ruchomej MA.

Model autoregresji AR ma ogólną postać [5, s. 98]:

$$y_t = \varphi_0 + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3)$$

gdzie:

$y_t, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$  – wartości zmiennej prognozowanej w okresie  $t, t-1, t-2, \dots, t-p$ ,

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  – parametry modelu,

$\varepsilon_t$  – błąd modelu w okresie  $t$ ,

$p$  – wielkość opóźnienia.

Budowa modeli AR opiera się na wzajemnej zależności zmiennej prognozowanej z wartościami tej samej zmiennej opóźnionymi w czasie. Model średniej ruchomej MA ma postać [4, s. 95]:

$$y_t = \vartheta_0 - \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} - \vartheta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \vartheta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \quad (4)$$

gdzie:

$y_t$  – wartość zmiennej prognozowanej w okresie  $t$ ,

$\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_p$  – parametry modelu,

$\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$  – błędy modelu w okresach  $t, t-1, t-2, \dots, t-p$ ,

$q$  – wielkość opóźnienia.

W przypadku modelu MA należy zaznaczyć, że suma parametrów modelu  $\sum_{i=1}^q \vartheta_{t-i}$  nie musi być równa jedności, a ponadto parametry te nie muszą być dodatnie [4, s. 95]. W wyniku połączenia modeli AR i MA otrzymujemy **model ARMA** [6, s. 120]:

$$y_t = \varphi_1 y_{t-1} + \dots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \vartheta_0 - \vartheta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \vartheta_q \varepsilon_{t-q} \quad (5)$$

Omówione modele AR, MA oraz ARMA zakładają stacjonarność szeregu zmiennej prognozowanej. W sytuacji, jeżeli szereg czasowy nie jest szeregiem stacjonarnym należy przekształcić go w szereg stacjonarny za pomocą operacji d-krotnego różnicowania [6, s. 239]. Proces różnicowania można przedstawić za pomocą równań (wzór 6 – dla pierwszych różnic) oraz (wzór 7 – dla kolejnych różnic) [6, s. 120].

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1} \quad (6)$$

$$\nabla^d y_t = \nabla^d y_t - \nabla^{d-1} y_{t-1} \quad (7)$$

Efektom zabiegu różnicowania niestacjonarnych szeregów czasowych jest możliwość ich prognozowania przy użyciu modeli AR, MA oraz ARMA. Modele takie, w których uprzednio nastąpiło różnicowanie nazywamy procesami zintegrowanymi: ARI (*ang. Autoregressive Integrated* – zintegrowany proces autoregresji), IMA (*ang. Integrated Moving Average* – zintegrowany proces średniej ruchomej) oraz ARIMA (*ang. Autoregressive Integrated Moving Average* – zintegrowany proces autoregresji i średniej ruchomej). Modele zintegrowane można przedstawić w ogólnej postaci ARIMA ( $p, q, d$ ), gdzie  $p$  oznacza rząd autoregresji,  $d$  krotność różnicowania, a  $q$  wielkość opóźnienia średniej ruchomej [12, s. 239]. **Proces ARIMA ( $p, q, d$ )** wyraża się wzorem [12, s. 240]:

$$\Phi_p(B)\nabla^d y_t = \Theta_q(B)\varepsilon_t \quad (8)$$

gdzie  $B$ , to tzw. operator przesunięcia wstecz obliczany na podstawie wzoru 9:

$$B\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1} \quad (9)$$

W przypadku wystąpienia sezonowości w szeregu czasowym model ARIMA podlega kolejnej modyfikacji, w wyniku której otrzymujemy model SARIMA (*ang. Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average* – zintegrowany sezonowy proces autoregresji i średniej ruchomej). Model SARIMA ogólnej postaci wyraża się wzorem:

$$\Phi_p(B^S)\nabla_S^d y_t = \Theta_q(B^S)\varepsilon_t \quad (10)$$

Jak napisano w pracy A. Lichoty [9, s. 57], „w modelu tym zakłada się, że wielkość prognozowana w okresie  $t$  zależy od przeszłych jej wartości i od błędów przeszłych prognoz oraz tych wartości w okresie  $t-s$ ”. W pracy tej możemy ponadto znaleźć szczegółowe zalecenia dotyczące możliwości stosowania wyżej wymienionych metod [9, s. 57–58]. Model autoregresyjny należy stosować gdy liczba współczynników korelacji cząstkowej jest bardzo mała. W przeciwnym wypadku należy stosować model średniej ruchomej. Model ARMA ma zastosowanie tam, gdzie wartości współczynników zarówno funkcji autoregresji jak i autoregresji cząstkowej maleją wykładniczo w kierunku zera. Procesy zintegrowane mają zastosowanie tam, gdzie jak już wcześniej wspomniano mamy do czynienia z niestacjonarnością szeregu czasowego.

Kolejną grupą statystycznych metod prognozowania są metody polegające na wygładzaniu szeregu czasowego za pomocą średniej ruchomej ważonej. Metody te szczegółowo zostały omówione przede wszystkim w pracach R. G. Browna [3], C. C. Holta [7] oraz P. R. Wintera [11].

**Model Browna**, czyli proste wygładzanie wykładnicze opisuje równanie:

$$y'_t = \alpha y_t + (1-\alpha)y'_{t-1} \quad (11)$$

gdzie:

$y'_t, y'_{t-1}$  – wyrównane wykładniczo średnie oceny trendu po okresach  $t$  oraz  $t-1$ ,

$y_t$  – ostatnia realizacja zmiennej prognozowanej,

$\alpha$  – stała wygładzania, przyjmująca wartości z przedziału  $\langle 0; 1 \rangle$

W przypadku tego modelu istotne jest początkowe ustalenie wartości prognozy na okres  $t$ . Z reguły przyjmuje się ją równą rzeczywistej wartości zmiennej z tego okresu:

$$y'_1 = y_1 \quad (12)$$

Należy zauważyć, że im dłuższy jest szereg czasowy, tym mniejszy wpływ na prognozę ma przyjęta wartość początkowa  $y_1'$ . Model ma zastosowanie w odniesieniu do stacjonarnych szeregów czasowych, w których mamy do czynienia z prawie stałym poziomem zmiennej prognozowanej oraz wahaniami przypadkowymi [10, s. 122].

**Podwójne wyrównanie wykładnicze Holta**, jak zauważa M. Sobczyk „znajduje zastosowanie wówczas, gdy w szeregu czasowym występuje składowa systematyczna w postaci liniowego trendu oraz niewielkie wahania sezonowe [10, s. 127]. Model ten służy do budowy prognoz krótkookresowych na jeden lub kilka okresów na przód. Zwiększając horyzont prognozowania należy liczyć się ze wzrostem niepewności.” Model opisują równania:

$$F_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}) \quad (13)$$

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1} \quad (14)$$

$$y_t' = F_{t-1} + S_{t-1} \quad (15)$$

gdzie:

$F_t, F_{t-1}$  – średnie obliczone wykładniczo po okresach  $t$  oraz  $t-1$ ,

$S_t, S_{t-1}$  – średnie zmiany trendu obliczone wykładniczo po okresach  $t$  oraz  $t-1$ ,

$\alpha, \beta$  – stałe wygładzania, przyjmujące wartości z przedziału  $\langle 0; 1 \rangle$

$y_t$  – ostatnia realizacja zmiennej prognozowanej,

W modelu występują dwie stałe wygładzania  $\alpha$  oraz  $\beta$ . Ich wartości są dobierane eksperymentalnie w taki sposób, aby zminimalizować średni kwadratowy błąd prognoz wygasłych [10, s. 128]. W przypadku tego modelu istotne jest ustalenie wartości początkowych  $F_1$  oraz  $S_1$ . Z reguły wartość  $F_1$  przyjmuje się na poziomie równym  $y_1$ . Z kolei wartość  $S_1$  można przyjąć na poziomie równym 0 lub obliczyć jako różnicę  $y_2 - y_1$ .

**Model Wintera** jest wykorzystywany, gdy w szeregu czasowym obok wahań przypadkowych i trendu występują również wahania sezonowe [10, s. 130]. Rozróżniamy wersję addytywną i multiplikatywną modelu. Addytywny model Wintera opisują równania:

$$F_t = \alpha(y_t - C_{t-r}) + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}) \quad (16)$$

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1} \quad (17)$$

$$C_t = \gamma(y_t - F_t) + (1 - \gamma)C_{t-r} \quad (18)$$

$$y_t' = F_t + S_t(t - n) + C_{t-r} \quad (19)$$

Multiplikatywny model Wintera opisują równania:

$$F_t = \alpha(y_t / C_{t-r}) + (1 - \alpha)(F_{t-1} + S_{t-1}) \quad (20)$$

$$S_t = \beta(F_t - F_{t-1}) + (1 - \beta)S_{t-1} \quad (21)$$

$$C_t = \gamma(y_t / F_t) + (1 - \gamma)C_{t-r} \quad (22)$$

$$y_t' = [F_t + S_t(t - n)]C_{t-r} \quad (23)$$

gdzie:

$F_t, F_{t-1}$  – średnie obliczone wykładniczo po okresach  $t$  oraz  $t-1$ ,

$S_t, S_{t-1}$  – średnie zmiany trendu obliczone wykładniczo po okresach  $t$  oraz  $t-1$ ,

$C_t$  – wskaźnik sezonowości,

$\alpha, \beta, \gamma$  – stałe wygładzania, przyjmujące wartości z przedziału  $\langle 0; 1 \rangle$

$y_t$  – ostatnia realizacja zmiennej prognozowanej,

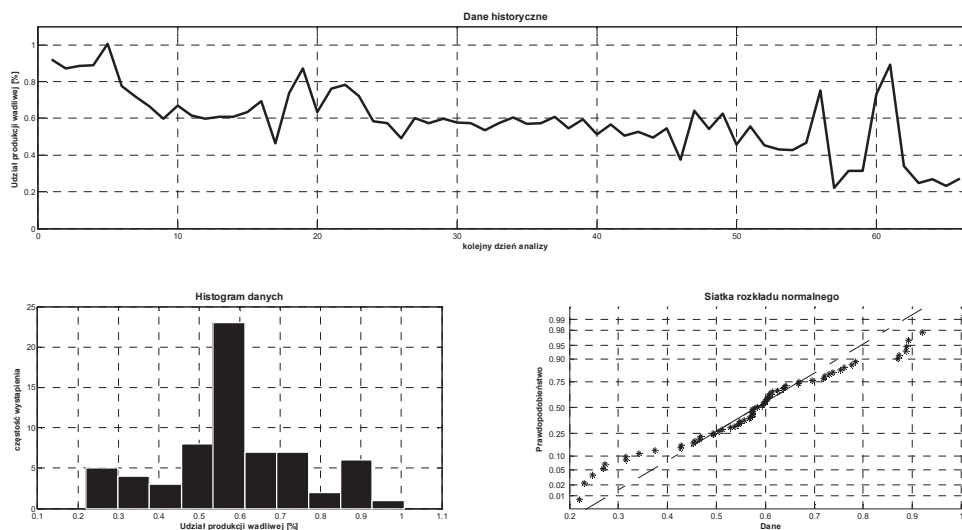
W modelu występują trzy stałe wygładzania  $\alpha, \beta$  oraz  $\gamma$ . Ich wartości – podobnie jak w przypadku modelu Holta – są dobierane eksperymentalnie w taki sposób, aby zminimalizować średni kwadratowy błąd prognoz wygasłych, przy czym  $\alpha$  wpływa na wygładzoną ocenę wartości średniej na okres  $t$ ,  $\beta$  decyduje o wartości przyrostu trendu liniowego na okres  $t$ , a  $\gamma$  wpływa na wygładzoną ocenę wartości absolutnych poziomów wahań sezonowych. Istotne jest ustalenie wartości początkowych  $F_1, S_1$  oraz  $C_1, C_2, \dots, C_r$ . Z reguły wartość  $F_1$  przyjmuje się na poziomie równym  $y_1$ . Z kolei wartość  $S_1$  można przyjąć na poziomie równym 0 lub obliczyć jako różnicę  $y_2 - y_1$ . Wartości  $C_1, C_2, \dots, C_r$  dobiera się w taki sposób, aby ich suma była równa 1.

## 2. Prognozowanie wielkości udziału produkcji wadliwej

Omówione w poprzednim podrozdziale metody posłużyły jako narzędzie do prognozowania udziału komponentów uszkodzonych w produkcji całkowitej w wybranym przedsiębiorstwie. Na rysunku 1 zaprezentowano dane, na podstawie których przeprowadzono analizy.

Jako dane wejściowe do utworzonych modeli prognostycznych posłużyły dane zebrane na przestrzeni kolejnych 66 dni roboczych. Jak można zauważyć na rysunku 1 udział komponentów uszkodzonych w produkcji całkowitej odznacza się trendem malejącym – najwyższy udział komponentów uszkodzonych w produkcji całkowitej odnotowano piątego dnia analizowanego okresu, natomiast najniższy dnia pięćdziesiątego siódmego. Większość danych skupiona jest jednak wokół średniej, czego potwierdzeniem są zamieszczone również na rysunku 1 histogram danych oraz siatka prawdopodobieństwa rozkładu normalnego. Wartości podstawowych miary statystycznych dla analizowanego zbioru danych zestawiono z kolei w tabeli 1.

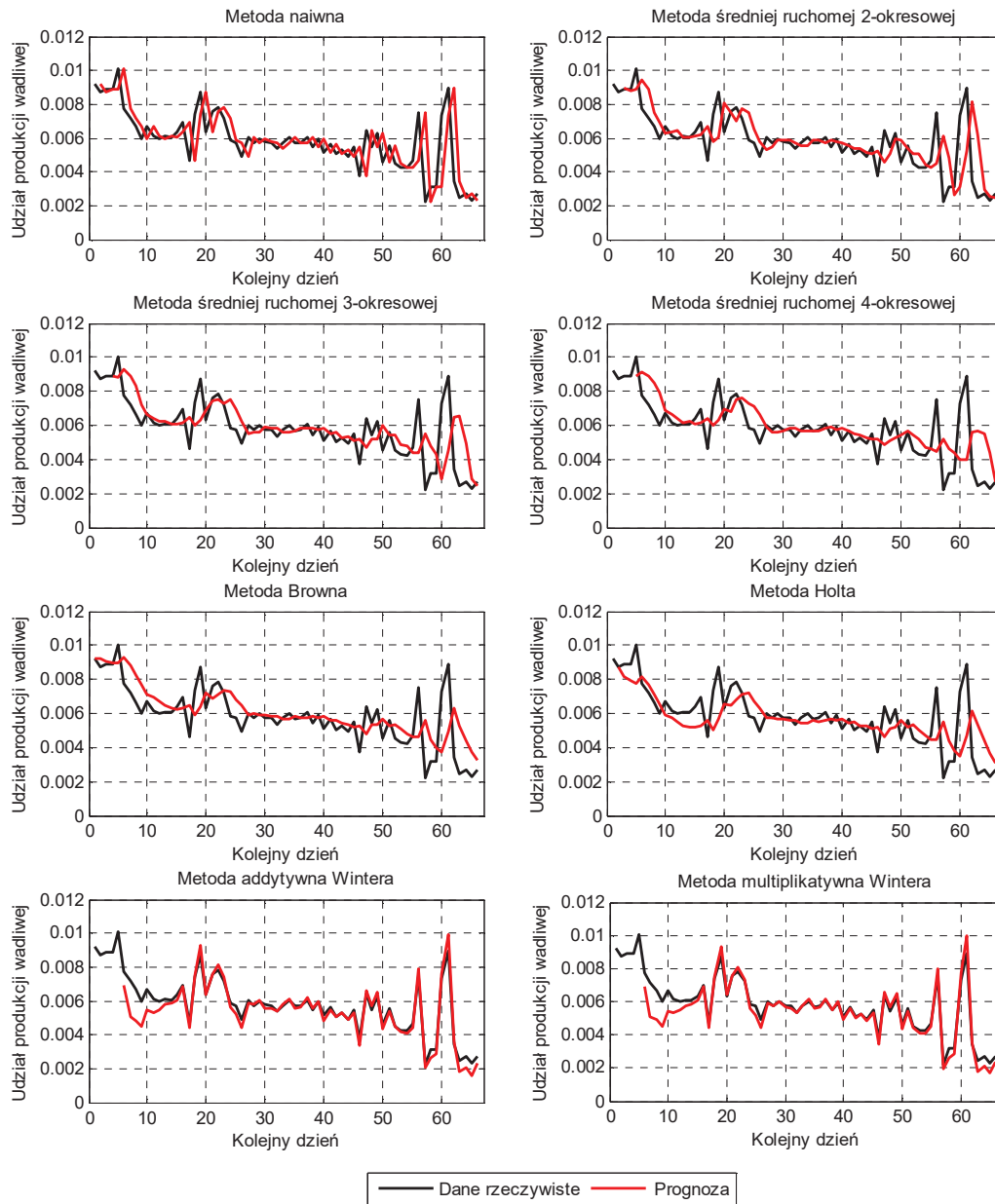
Wojciech Woźniak, Jerzy Mikulik  
 Krótkoterminowe prognozowanie wielkości udziału komponentów uszkodzonych  
 w produkcji całkowitej z wykorzystaniem klasycznych metod predykcji



Rysunek 1. Dane, na podstawie których przeprowadzono proces prognozowania  
 Tabela 1. Wartości podstawowych miar statystycznych analizowanego zbioru danych

Miara statystyczna	Wartość miary
Średnia	0,005853
Odchylenie standardowe	0,001737
Minimum	0,002195
Maksimum	0,010067
Rozstęp	0,007872
Mediana	0,005811
Współczynnik kierunkowy liniowej funkcji trendu	-0,000063
Wyraz wolny liniowej funkcji trendu	0,007967

Na rysunku 2 zaprezentowano przebiegi prognoz wygasłych uzyskanych z zastosowania wybranych metod prognostycznych.



Rysunek 2. Prognozy wielkości udziału produkcji wadliwej w produkcji całkowitej uzyskane z zastosowania wybranych metod prognozowania

Oceny uzyskanych wyników dokonano na podstawie miar błędów *ex post* (tab. 2).

Tabela 2. Podstawowe miary błędów *ex post*

Błąd	Funkcja błędu
Błąd średni (ang. <i>Mean error</i> )	$ME = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)$
Wartość bezwzględna błędu średniego (ang. <i>Mean absolut error</i> )	$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  y_i - y'_i $
Pierwiastek bezwzględnego błędu średniokwadratowego (ang. <i>Root mean squared error</i> )	$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2}$
Średni błąd procentowy (ang. <i>Mean percentage error</i> )	$MPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - y'_i}{y_i}$
Średni względny błąd procentowy (ang. <i>Mean absolut percentage error</i> )	$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left  \frac{y_i - y'_i}{y_i} \right $

Źródło: opracowanie własne na podstawie [8, s. 53].

W tabeli 3 zastosowano zestawienie tychże miar dla analizowanego przypadku.

Tabela 3. Wartości błędów uzyskanych z zastosowania wybranych metod predykcji do prognozowania udziału komponentów wadliwych w produkcji całkowitej

Metoda prognozowania	Błąd				
	ME	MAE	RMSE	MPE	MAPE
Metoda naiwna	-0,000100	0,000958	0,001490	-6,75%	19,99%
Metoda średniej ruchomej 2-okresowej	-0,000147	0,000940	0,001463	-8,65%	19,87%
Metoda średniej ruchomej 3-okresowej	-0,000200	0,000989	0,001475	-10,45%	21,33%
Metoda średniej ruchomej 4-okresowej	-0,000254	0,001004	0,001442	-11,78%	21,71%
Metoda Browna	-0,000272	0,000939	0,001327	-11,13%	19,98%
Metoda Holta	0,000133	0,000971	0,001377	-4,78%	19,92%
Metoda addytywna Wintera	0,000216	0,000353	0,000551	4,88%	6,84%
Metoda multiplikatywna Wintera	0,000213	0,000343	0,000542	4,90%	6,68%

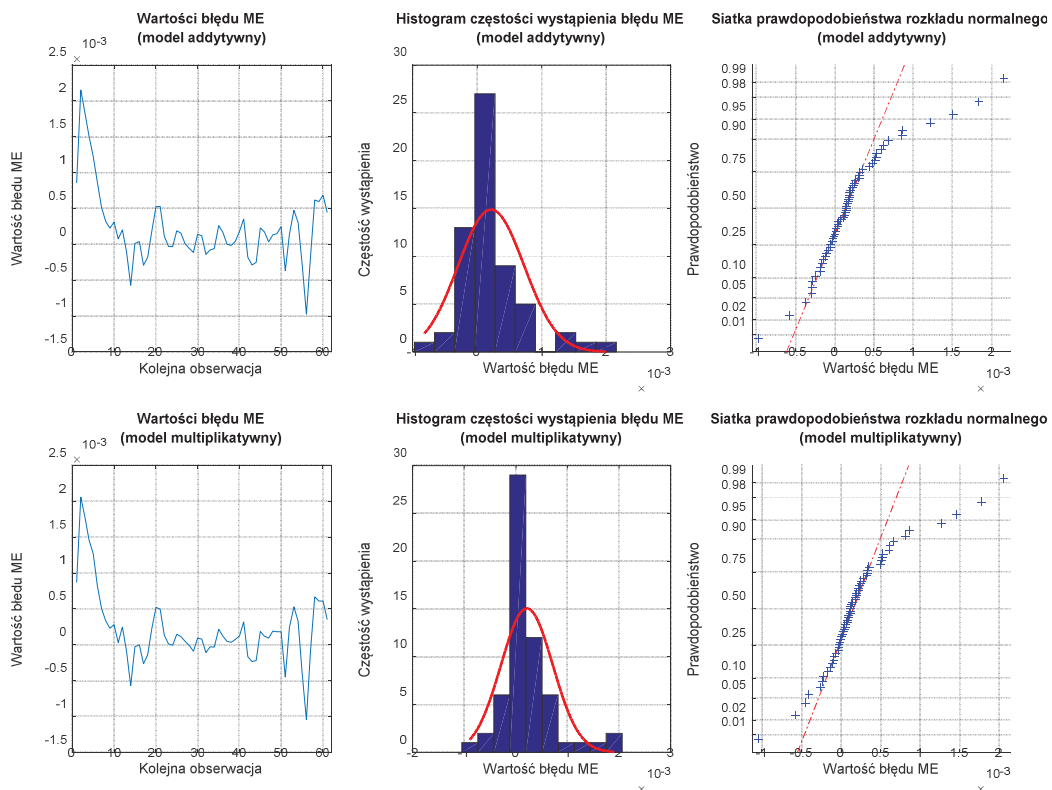
W przypadku metod wygładzania wykładniczego stałe wygładzania zostały dobrane w taki sposób, aby zminimalizować wartość błędu *RMSE*. Zestawienie tychże stałych zamieszczono w tabeli 4.



Tabela 4. Wartości stałych wygładzania w utworzonych metodami Browna, Holta i Wintera modelach prognostycznych

Metoda prognozowania	Stała wygładzania		
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Metoda Browna	0,3398	-	-
Metoda Holta	0,3198	0,1111	-
Metoda addytywna Wintera	0,9054	0,2924	0,0010
Metoda multiplikatywna Wintera	0,9104	0,2948	0,0010

Najniższe wartości błędów uzyskano dla prognoz zbudowanych w oparciu o modele Wintera. Analizy rozkładów błędów uzyskanych z zastosowania omawianych wcześniej metod prognostycznych potwierdziły słuszność wyboru modeli Wintera (rys. 3).



Rysunek 3. Analiza błędów uzyskanych z zastosowania modeli Wintera do prognozowania wielkości udziału produkcji wadliwej

### 3. Podsumowanie

Tematyka prognozowania i analizy szeregów czasowych stanowi nieprzerwanie istotny i aktualny obszar badań naukowych. W niniejszej pracy zbadano możliwość wykorzystania klasycznych metod prognostycznych do prognozowania wielkości udziału komponentów uszkodzonych w produkcji całkowitej w przykładowym przedsiębiorstwie. Wykorzystując metodę naiwną, metody średniej ruchomej oraz metody wygładzania wykładniczego najlepsze rezultaty uzyskano dla modeli prognostycznych zbudowanych w oparciu o modele Wintera. Kolejne badania jakie będą prowadzone w tym temacie, będą związane ze sprawdzeniem możliwości zastosowania metod wskaźników sezonowości oraz ich modyfikacji do prognozowania udziału komponentów wadliwych.

### Bibliografia

- [1] Box G. E. P., Jenkins G. M.: *Analiza szeregów czasowych*. PWE, Warszawa 1983.
- [2] Bozarth C., Handfield R. B.: *Wprowadzenie do zarządzania operacjami i łańcuchem dostaw*. Helion, Gliwice 2007.
- [3] Brown R. G.: *Statistical Forecasting for Inventory Control*. McGraw-Hill, Nowy Jork 1959.
- [4] Cieślak M. [red.]: *Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania*. PWN, Warszawa 1999.
- [5] Dittmann P.: *Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Metody i ich zastosowanie*. Wolters Kluwer business, Kraków 2008.
- [6] Dittmann P., Dittmann I., Szabela-Pasierbińska E., Szpulak A.: *Prognozowanie w zarządzaniu przedsiębiorstwem*. Wolters Kluwer business, Kraków 2009.
- [7] Holt C. C.: *Forecasting Seasonal and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages*. ONR Research Memorandum No. 52/1957.
- [8] Krzyżaniak S.: *Podstawy zarządzania zapasami w przykładach*. ILiM, Poznań 2008.
- [9] Lichota A.: *Prognozowanie krótkoterminowe na lokalnym rynku energii elektrycznej*. rozprawa doktorska, Wydział Zarządzania AGH, Kraków 2006.
- [10] Sobczyk M.: *Prognozowanie*. PLACET, Warszawa 2008.
- [11] Winters P. R.: *General Exponential forecasting; A Computer Program for the IBM 360*. ONR Research Memorandum No. 71/1960.
- [12] Zeliaś A., Pawelek B., Wanat S.: *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania*. PWN, Warszawa 2003.
- [13] Zeliaś A.: *Teoria prognozy*. PWE, Warszawa 1997.

**SHORT-TERM FORECASTING OF THE SHARE OF FAILURE COMPONENTS  
IN TOTAL PRODUCTION USING CLASSICAL FORECASTING METHODS**

Summary

*In the paper short-term forecasting models of the share of failure components in total production in some production enterprise has been presented. Using naive method, moving average methods and exponential smoothing methods, forecasting models has been built. The obtained results has been compared and discussed.*

**Keywords:** error analysis, reliability, forecasting

Praca realizowana w ramach badań statutowych prowadzonych w AGH nr 11.11.200.322.

Wojciech Woźniak  
Jerzy Mikulik  
Katedra Inżynierii Zarządzania  
Wydział Zarządzania  
AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie  
Ul. Gramatyka 10, 30-067 Kraków  
e-mail: wojciech.wozniak.293@zarz.agh.edu.pl  
jmikulik@zarz.agh.edu.pl