

METODA USTALANIA LICZBY POWTÓRZEŃ EKSPERYMENTU SYMULACYJNEGO O SKOŃCZONYM HORYZONCIE CZASOWYM

KRZYSZTOF JURCZYK, WOJCIECH WOŹNIAK

Streszczenie

Symulacja komputerowa stanowi doskonale narzędzie służące analizie złożonych procesów czy systemów logistycznych. Znajduje zastosowanie w sytuacjach, gdy zawodzą dostępne metody analityczne jednocześnie dostarczając jak największej liczby informacji o analizowanym procesie. Ze względu na analizę wyników uzyskanych z eksperymentów symulacyjnych rozróżnia się dwie kategorie symulacji – symulację o skończonym horyzoncie czasowym oraz symulację o nieskończonym czasie trwania. W niniejszej pracy zwrócono uwagę na problem ustalania liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego w skończonym horyzoncie czasowym. Stosując metody bezwzględnej oraz względnej precyzji ustalono liczbę powtórzeń przykładowego eksperymentu. Ponadto zaproponowano autorski sposób ustalania liczby powtórzeń polegający na odrzucaniu kolejnych obserwacji mających znikomy wpływ na uśrednione wyniki końcowe.

Słowa kluczowe: analiza danych wyjściowych, harmonogramowanie, symulacja

Wprowadzenie

Wśród najczęściej stosowanych w praktyce narzędzi wspomagających procesy podejmowania decyzji związanych z identyfikacją, analizą oraz optymalizacją i planowaniem systemów logistycznych metody bazujące na modelowaniu symulacyjnym bez wątpienia stanowią największy udział. Symulacja komputerowa ma zastosowanie w sytuacjach, gdy dokładne zbadanie wybranego procesu czy systemu przy wykorzystaniu metod matematycznych czy narzędzi analitycznych z obszaru badań operacyjnych jest zbyt uciążliwe i skomplikowane [4]. Celem symulacji jest dostarczenie jak największej liczby informacji o analizowanym procesie oraz umożliwienie dokonania analizy wrażliwości tego procesu na zmiany parametrów nim sterujących. Łatwo wysnuć wniosek, że narzędzie jakim jest symulacja komputerowa wymagało będzie od modelującego wprowadzenia precyzyjnych danych wejściowych. Problem ten szeroko opisano w dostępnej literaturze przedmiotu. Doskonałą taksonomię modeli danych wejściowych przedstawił L.M. Leemis w [7] oraz w [8]. Inne aspekty związane z przygotowaniem danych do modeli symulacyjnych, tzn. aspekty związane z odpowiednim doбором, poprawnością, spójnością czy kompletnością danych wejściowych do modeli symulacyjnych poruszają w swoich pracach chociażby N. Robertson i T. Perera w [nr], S. Robinson w [11], A. Skoogh i in. w [12] i [13], czy P. Hanczar i in. w [3]. W pracy M. Karkuli i in. zwrócono z kolei uwagę na uwzględnienie czynników niedeterministycznych w modelach symulacyjnych procesów logistycznych [5]. W niniejszym artykule uwagę skupiono jednak na kompleksowej analizie wyników uzyskanych z eksperymentów symulacyjnych dla symulacji o skończonym horyzoncie czasowym.

1. Sposoby ustalania liczby powtórzeń eksperymentów symulacyjnych

Analiza danych wyjściowych podobnie jak analiza danych wejściowych do modeli symulacyjnych musi być przeprowadzona przy wykorzystaniu odpowiednich technik walidacyjnych i statystycznych, tak aby w oparciu o uzyskane rezultaty można było podejmować odpowiednie decyzje. Na problem ten zwracają uwagę w swoich pracach m. in. C. Alexopoulos i A. Seila w [1], N. Nakayama w [9], A. Law w [6], czy M. Karkula w [4]. Ostatni z wymienionych autorów, podobnie jak Ch.A. Chung w [2] zwracają uwagę na ustalenie liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego. Poniżej zaprezentowano procedurę ustalania liczby powtórzeń eksperymentów symulacyjnych przedstawioną w [4].

Eksperyment symulacyjny powinien zostać powtórzony określoną liczbą razy. Liczba powtórzeń powinna zostać ustalona w taki sposób, aby zapewnić wymagany przez modelującego poziom wiarygodności modelu. Wstępne ustalenie liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego oraz analiza uzyskanych w ten sposób wyników pozwala stwierdzić, czy konieczne jest zwiększenie liczby iteracji czy też nie. Zbyt mała wyjściowa liczba powtórzeń zwiększa ryzyko uzyskania niewystarczających informacji, z kolei zbyt duża liczba niepotrzebnych powtórzeń eksperymentu wydłuża czas potrzebny na zakończenie przedsięwzięcia i podnosi jego koszty.

Pierwszym etapem ustalenia liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego jest obliczenie wartości średniej oraz odchylenia standardowego wyników uzyskanych z n niezależnych powtórzeń eksperymentu (n oznacza ustaloną wyjściową liczbę powtórzeń).

Załóżmy, że wykonano n niezależnych powtórzeń eksperymentu symulacyjnego o skończonym horyzoncie czasowym i uzyskano n niezależnych rozwiązań X_i , gdzie i oznacza indeks danego powtórzenia. Następnie wg wzorów opisanych równaniami 1 oraz 2 obliczono wartość średnią oraz odchylenie standardowe tych wyników:

$$\bar{X}(n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (1)$$

$$S(n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [X_i - \bar{X}(n)]^2}{n-1}} \quad (2)$$

Obliczone wartości średniej oraz odchylenia standardowego służą ustaleniu przedziału ufności dla wartości oczekiwanej. Wykorzystuje się statystykę t odczytywaną z tablic rozkładu t -Studenta z $n-1$ stopniami swobody przy założonym poziomie istotności α .

Prawdopodobieństwo tego, że uzyskany wynik mieści się w zadanym przedziale wynosi $100(1 - \alpha) \%$:

$$P\left\{\bar{X}(n) - t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}} < X_k < \bar{X}(n) + t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}\right\} = 1 - \alpha \quad (3)$$

Wartość błędu standardowego SE jakom obarczone są wyniki eksperymentu wysnacza się następnie według równania 4.

$$SE = t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}} \quad (4)$$

Istnieją dwa podstawowe sposoby ustalenia liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego: metoda bezwzględnej precyzji oraz metoda względnej precyzji.

W przypadku metody bezwzględnej precyzji [9] należy ustalić akceptowalny poziom błędu SE. Liczba iteracji potrzebna do osiągnięcia zakładanego poziomu precyzji jest obliczana wg wzoru opisanego równaniem:

$$i = n \cdot \left(\frac{t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}}{AP} \right)^2 \quad (5)$$

gdzie AP oznacza przyjęty poziom precyzji.

Alternatywną metodą jest metoda względnej precyzji. Polega na ustaleniu, nie jak w przypadku metody bezwzględnej precyzji akceptowalnego poziomu błędu SE, ale na przyjęciu dopuszczalnej wartości błędu procentowego PE:

$$PE = \frac{t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}}{\bar{X}} \quad (6)$$

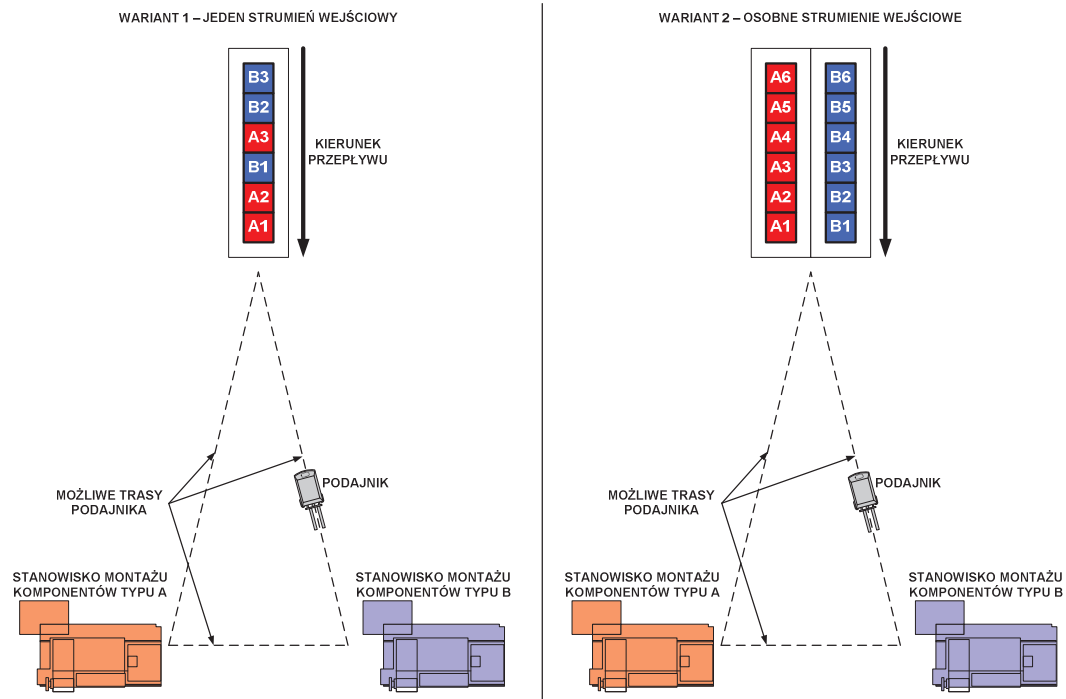
Liczbę iteracji oblicza się następnie wg wzoru:

$$i = n \cdot \left(\frac{\frac{t_{1-\alpha/2, n-1} \cdot \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}}{\bar{X}}}{RP} \right)^2 \quad (7)$$

gdzie RP oznacza przyjęty względny poziom precyzji.

2. Przykłady eksperymentów symulacyjnych i ich analiza

Rozważmy sytuację, w której jeden podajnik obsługuje dwa stanowiska montażowe dedykowane dla dwóch różnych komponentów, które oznaczymy jako A oraz B. Czasy między przybyciami oraz czasy montażu każdego z komponentów są liczbami losowymi o rozkładzie jednostajnym i parametrach: dla komponentu A odpowiednio 210 i 390 sekund oraz 120 i 360 sekund oraz dla komponentu B odpowiednio 126 i 234 sekund oraz 138 i 318 sekund. Czasy transportu komponentów przez podajnik z wejścia systemu na stanowisko montażowe oraz ze stanowiska montażowego do wyjścia podlegają również rozkładowi jednostajnemu, którego parametry wynoszą odpowiednio 120 i 156 sekund oraz 84 i 96 sekund. Przeanalizowane zostaną dwa warianty – w pierwszym mamy do czynienia z sytuacją, w której komponenty pojawiające się na wejściu systemu układają się w jeden strumień wejściowy, natomiast w wariacie drugim utworzono osobne strumienie wejściowe dla każdego z komponentów A oraz B. Omawiane warianty obrazuje rysunek 1.



Rysunek 1. Warianty analizowanego eksperymentu symulacyjnego

Źródło: opracowanie własne.

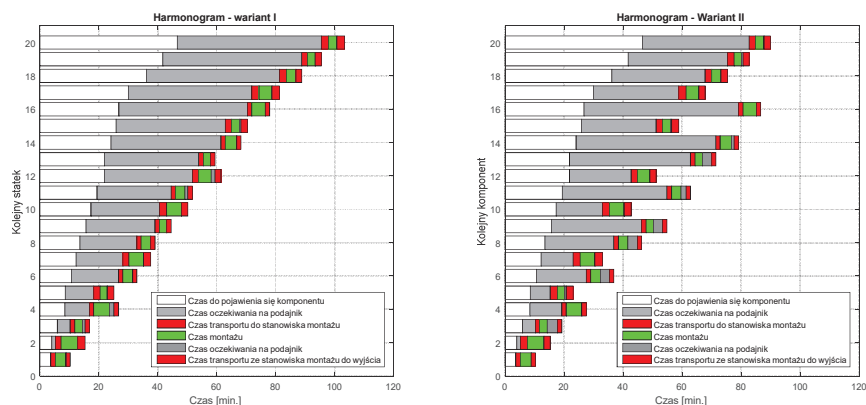
Badania rozpoczęto od wykonania pojedynczego eksperymentu symulacyjnego dla obu przedstawionych wariantów dla przykładowej liczby 20 komponentów wejściowych (10 typu A oraz 10 typu B). Jako zmienne wyjściowe zdefiniowano sumaryczny następujące charakterystyki: średni czas oczekiwania komponentu na podajnik $\overline{T_{ocz}}$, średni czas przebywania komponentu w systemie $\overline{T_{prz}}$, całkowitą długość harmonogramu produkcyjnego T_{sum} oraz sumaryczny czas bezczynności podajnika T_{bcz} . Zestawienie wyników zamieszczono w tabeli 1, natomiast na rysunku 2 zaprezentowano harmonogramy obsługi kolejnych komponentów.

Tabela 1. Wyniki pierwszego eksperymentu symulacyjnego

Zmienna wyjściowa	$\overline{T_{ocz}}$	$\overline{T_{prz}}$	T_{sum}	T_{bcz}
Wariant I	1543 s.	1985 s.	6206 s.	1706 s.
Wariant II	1478 s.	1921 s.	5392 s.	892 s.

Źródło: opracowanie własne.

Krzysztof Jurczyk, Wojciech Woźniak
 Metoda ustalania liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego
 o skończonym horyzoncie czasowym



Rysunek 2. Harmonogramy produkcyjne sporządzone na podstawie wyników pierwszego eksperymentu symulacyjnego

Źródło: opracowanie własne.

Łatwo zauważyć, że zastosowanie osobnych strumieni wejściowych dla komponentów A i B wpływa na otrzymane rezultaty, w szczególności na długość harmonogramu oraz sumaryczny czas bezczynności podajnika. Należy się jednak zastanowić, czy uzyskane wyniki są poprawne. Powtarzając eksperyment symulacyjny kolejne 8 razy uzyskujemy zupełnie inne i znacząco od siebie odbiegające rozwiązania, które zestawiono w tabeli 2.

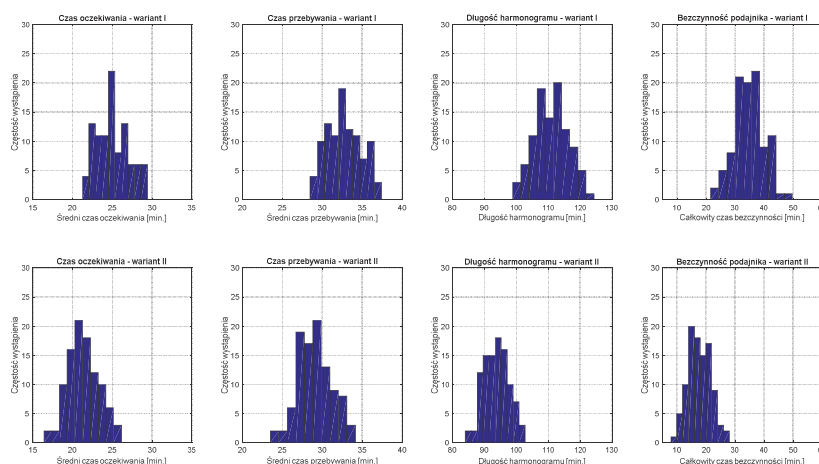
Tabela 2. Wyniki pierwszego eksperymentu symulacyjnego

Wariant	Kolejne powtórzenie	Zmienna wynikowa			
		\overline{T}_{ocz}	\overline{T}_{prz}	T_{sum}	T_{bcz}
I	1	1543 s.	1985 s.	6206 s.	1706 s.
	2	1361 s.	1797 s.	6442 s.	1948 s.
	3	1678 s.	2160 s.	6842 s.	2276 s.
	4	1394 s.	1856 s.	6387 s.	1821 s.
	5	1669 s.	2139 s.	6923 s.	2285 s.
	6	1317 s.	1785 s.	6680 s.	2078 s.
	7	1555 s.	2012 s.	6396 s.	1968 s.
	8	1802 s.	2253 s.	6845 s.	2333 s.
II	1	1478 s.	1921 s.	5392 s.	892 s.
	2	1216 s.	1654 s.	5330 s.	788 s.
	3	1423 s.	1906 s.	5798 s.	1196 s.
	4	1250 s.	1714 s.	5514 s.	912 s.
	5	1404 s.	1876 s.	5683 s.	1003 s.
	6	1252 s.	1719 s.	5691 s.	1125 s.
	7	1295 s.	1758 s.	5585 s.	1031 s.
	8	1313 s.	1765 s.	5520 s.	972 s.

Źródło: opracowanie własne.

Symulowane harmonogramy produkcyjne też będą się między sobą różnić w zależności od kolejnego powtórzenia eksperymentu. Pojawia się zatem pytanie, który z otrzymanych wyników jest prawidłowy.

Eksperyment symulacyjny powinien zostać powtórzony określoną liczbą razy co zaznaczono na wstępie niniejszej pracy. W analizowanym przypadku wstępna liczba powtórzeń eksperymentu symulacyjnego została ustalona jako 100. Rozkłady uzyskanych w ten sposób rozwiązań zamieszczono na rysunku 3.



Rysunek 3. Histogramy obrazujące rozkłady wyników stu pierwszych powtórzeń eksperymentu symulacyjnego

Źródło: opracowanie własne.

Kolejny etap badań polegał na obliczeniu wartości średnich (równanie 1) oraz odchyłeń standardowych (równanie 2) uzyskanych wyników, a następnie wyznaczeniu przedziałów ufności dla wartości oczekiwanych na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ (równanie 3) oraz wartości błędów standardowych (równanie 4) i procentowych (równanie 6) jakimi są obarczone wyniki eksperymentów, co zobrazowano tabelami 3 i 4.

Tabela 3. Wybrane miary statystyczne wyników uzyskanych z przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych – wariant I

Metryka	Zmienna wynikowa			
	\overline{T}_{ocz}	\overline{T}_{prz}	T_{sum}	T_{bcz}
Średnia	1503 s.	1964 s.	6655 s.	2094 s.
Odchylenie standardowe	124 s.	130 s.	312 s.	307 s.
Dolna granica przedziału ufności	1483 s.	1944 s.	6624 s.	2064 s.
Górna granica przedziału ufności	1523 s.	1984 s.	6686 s.	2126 s.
Wartość błędu standardowego SE	20 s.	20 s.	31 s.	31 s.
Wartość błędu procentowego PE	1,33 %	1,02 %	0,47 %	1,48 %

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Wybrane miary statystyczne wyników uzyskanych z przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych – wariant II

Metryka	Zmienna wynikowa			
	\overline{T}_{ocz}	\overline{T}_{prz}	T_{sum}	T_{bcz}
Średnia	1283 s.	1744 s.	5627 s.	1067 s.
Odchylenie standardowe	118 s.	129 s.	235 s.	231 s.
Dolna granica przedziału ufności	1264 s.	1724 s.	5600 s.	1040 s.
Górna granica przedziału ufności	1302 s.	1764 s.	5654 s.	1094 s.
Wartość błędu standardowego SE	19 s.	20 s.	27 s.	27 s.
Wartość błędu procentowego PE	1,48 %	1,15 %	0,48 %	2,53 %

Źródło: opracowanie własne.

Następnie obliczono liczbę powtórzeń eksperymentu symulacyjnego stosując przytoczone na wstępie metody bezwzględnej oraz względnej precyzji uzyskując wyniki jak w tabeli 5.

Tabela 5. Obliczona liczba powtórzeń w zależności od analizowanych zmiennych wynikowych oraz przyjętych poziomów precyzji

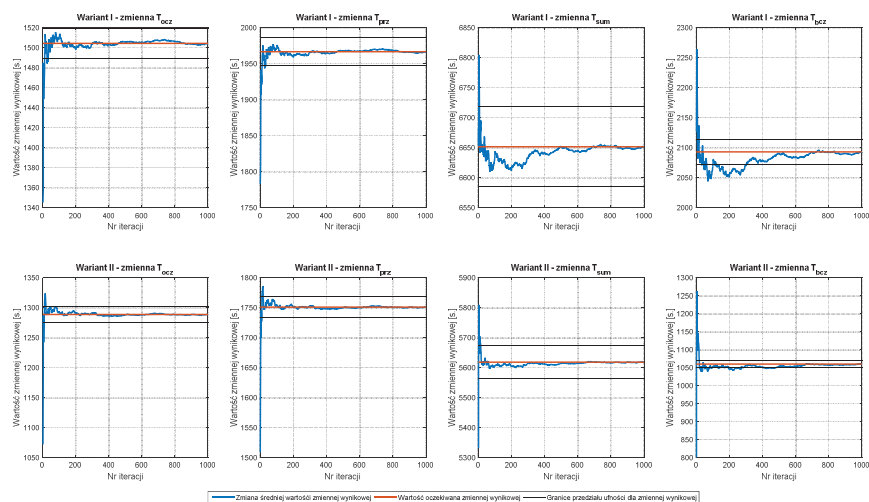
	Wariant	Zmienna wynikowa			
		\overline{T}_{ocz}	\overline{T}_{prz}	T_{sum}	T_{bcz}
Przyjęty poziom precyzji AP	I	10 s.	10 s.	10 s.	10 s.
Liczba powtórzeń wg metody bezwzględnej precy-		400	400	961	961
Przyjęty poziom precyzji RP		0,01	0,01	0,01	0,01
Liczba powtórzeń wg metody względnej precyzji		134	102	47	149
Przyjęty poziom precyzji AP	II	10 s.	10 s.	10 s.	10 s.
Liczba powtórzeń wg metody bezwzględnej precy-		361	400	729	729
Przyjęty poziom precyzji RP		0,01	0,01	0,01	0,01
Liczba powtórzeń wg metody względnej precyzji		149	115	48	254

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku metody bezwzględnej precyzji obliczona liczba powtórzeń wyniesie 961, natomiast w przypadku metody względnej precyzji będą to 254 powtórzenia.

3. Metoda ustalenia liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego

W niniejszym podrozdziale zaprezentowano alternatywne podejście do problemu ustalania liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego. Proponowane podejście polega na sukcesywnym zwiększaniu liczby iteracji, aż do momentu, w którym każdy kolejny wynik nie będzie miał znaczącego wpływu na rozkład wcześniejszych wyników. Od modelującego zależy zdefiniowanie dokładności oczekiwanych rezultatów – w analizowanym przypadku założono stopień dokładności na poziomie równym 1%. Na rysunku 4 zaprezentowano zmiany średnich wartości analizowanych zmiennych wynikowych w zależności od wykonanej liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego.



Rysunek 4. Zmiany średnich wartości analizowanych zmiennych wynikowych w zależności od wykonanej liczby powtórzeń eksperymentu symulacyjnego

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie przeprowadzonych badań ustalono, że wymagana liczba powtórzeń analizowanego eksperymentu symulacyjnego wynosi 721 i jest determinowana przez zmienną T_{bcz} . Każde kolejne powtórzenie nie ma znaczącego wpływu na rozkład uzyskanych wyników (tabela 6).

Tabela 6. Obliczona liczba powtórzeń w zależności od analizowanych zmiennych wynikowych

Wariant	Zmienna wynikowa			
	\overline{T}_{ocz}	\overline{T}_{prz}	T_{sum}	T_{bcz}
I	303	303	497	721
II	219	512	660	662

Źródło: opracowanie własne.

4. Podsumowanie

Zastosowanie osobnych strumieni wejściowych dla dwóch różnych rodzajów komponentów w systemie dwóch stanowisk montażowych obsługiwanych przez jeden podajnik znacząco wpływa na skrócenie wartości takich parametrów jak długość harmonogramu produkcyjnego, czas bezczynności podajnika, czas oczekiwania komponentu na podajnik oraz czas przebywania komponentu w systemie. Zbudowanie odpowiedniego modelu symulacyjnego i analiza wyników uzyskanych z przeprowadzonych eksperymentów umożliwiła dokładne porównanie obu analizowanych wariantów.

Średni czas oczekiwania komponentu na podajnik w systemie z jednym strumieniem wejściowym jest o 17,15 % dłuższy niż w przypadku systemu z osobnymi strumieniami wejściowymi.

Średni czas przebywania komponentu w systemie z jednym strumieniem wejściowym jest o 12,62 % dłuższy niż w przypadku systemu z osobnymi strumieniami wejściowymi. Podobnie wyglądają wyniki dotyczące średniej długości harmonogramu i całkowitego czasu bezczynności podajnika. W systemie z jednym strumieniem wejściowym wartości tych parametrów są większe o odpowiednio 18,27 % i 96,25 % niż w przypadku systemu z osobnymi strumieniami wejściowymi. Takie miarodajne rezultaty mogły zostać uzyskane tylko pod warunkiem powtórzenia eksperymentu symulacyjnego określoną liczbę razy na co zwrócono uwagę w niniejszym artykule.

Bibliografia

- [1] Alexopoulos C., Seila A., *Advanced methods for simulation output analysis*. Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference, 1998, s. 113–120.
- [2] Chung Ch.A., *Simulation modeling handbook: a practical approach*. CRC Press, Boca Raton, 2004.
- [3] Hanczar P. i in., *Quantitative methods in logistics management*. AGH, Kraków 2014.
- [4] Karkula M., *Modelowanie i symulacja procesów logistycznych*. AGH, Kraków 2013.
- [5] Karkula M., Jurczyk K., Bukowski L., *Nondeterministic factors in simulation models of logistics processes*. CLC'2012: Carpathian Logistics Congress, November 7th-9th 2012, Jasenik, Czech Republic, Congress proceedings (reviewed version), TANGER Ltd., Ostrava, Czech Republic, 2013, s. 529–535.
- [6] Law A., *Statistical analysis of simulation output data: the practical state of art*. Proceedings of the 2010 Winter Simulation Conference, 2010, s. 65–74.
- [7] Leemis L.M., *Building credible input models*. Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference, 2004, s. 29–40.
- [8] Leemis L.M., *Seven habits of highly successful input modelers*. Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference, 1997, s. 39–46.
- [9] Nakayama N., *Statistical analysis of simulation output*. Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference, 2008, s. 62–72.
- [10] Robertson N., Perera T., *Automated data collection for simulation?* Simulation Practice and Theory, Vol. 9, 2002, s. 349–364.
- [11] Robinson S., *Simulation: The practice of Model Development and Use*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2004.
- [12] Skoogh A., Johansson B., *A methodology for input data management in discrete event simulation projects*. Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference, 2008, s. 1727–1735.
- [13] Skoogh A., Perera T., Johansson B., *Input data management in simulation – Industrial practices and future trends*. Simulation Modelling Practice and Theory, Vol. 29, 2012, s. 181–192.

**METHOD OF DETERMINATION OF NUMBER OF REPLICATIONS
OF TERMINATING SIMULATION EXPERIMENTS**

Summary

Computer simulation is an excellent tool for the analysis of complex logistics processes and systems. It can be used in situations where the available analytical methods can not be implemented. There can be listed two main categories of simulation – terminating simulation and steady state simulation. In this study the problem of determination of number of replications of simulation experiment in a finite time horizon has been highlighted. Using the methods of absolute and relative precision the number of replications of the exemplary experiment has been determined. Moreover, the original method of determination of number of replications has been introduced.

Keywords: output data analysis, scheduling, simulation

Praca realizowana i finansowana w ramach grantu dziekańskiego nr 15.11.200.329

Krzysztof Jurczyk
Katedra Inżynierii Zarządzania
Wydział Zarządzania
AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Ul. Gramatyka 10, 30-067 Kraków
e-mail: kjurczyk@zarz.agh.edu.pl

Wojciech Woźniak
Katedra Inżynierii Zarządzania
Wydział Zarządzania
AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie
Ul. Gramatyka 10, 30-067 Kraków
e-mail: wojciech.wozniak.293@zarz.agh.edu.pl