FUNKCJA PRZYNALEŻNOŚCI ZBIORU ROZMYTEGO – METODY KONSTRUKCJI I INTERPRETACJI[1]

OLGIERD HRYNIEWICZ
Instytut Badań Systemowych PAN

Streszczenie

Zbiory rozmyte stały się podstawowym narzędziem modelowania niepewności o charakterze różniącym się od zwykłej losowości. Podstawową charakterystyką, która w jednoznaczny sposób opisuje zbiór rozmyty jest funkcja przynależności. W praktycznych zastosowaniach zakłada się, że funkcja przynależności podawana jest przez użytkownika, który konstruuje ją na podstawie dostępnych informacji, zarówno subiektywnych jak i obiektywnych. Mogą to być subiektywne informacje podane przez pojedynczego eksperta lub wyniki pomiarów (obiektywnych lub subiektywnych). W referacie przedstawiony zostanie krótki opis podstawowych metod konstrukcji i interpretacji funkcji przynależności. Zaprezentowana zostanie nowa interpretacja probabilistycznego podejścia do konstrukcji funkcji przynależności, wykorzystująca posybilistyczną interpretację zbiorów rozmytych.

Słowa kluczowe: zbiory rozmyte, funkcja przynależności, metody konstrukcji, kopuły.

1. Wprowadzenie

Zbiory rozmyte wprowadzone w latach 1960-tych przez Lotfi A. Zadeha są powszechnie stosowanym aparatem formalnym służącym do opisu zjawisk i wielkości niepewnych (o ile niepewność ta nie ma charakteru losowego) lub nieprecyzyjnie określonych. Formalnie, zbiór rozmyty definiowany jest na pewnej przestrzeni rozważań X jako zbiór uporządkowanych par $(x \in X, \mu(x))$, gdzie funkcja $\mu(x)$, zwana *funkcją przynależności rozmytego zbioru X* ma ogólną postać $\mu_X : X \to [0,1]$. Znajomość funkcji przynależności $\mu(x)$ jest tożsama ze znajomością opisanego przy jej pomocy zbioru rozmytego oznaczanego zazwyczaj symbolem $\widetilde{X}$. Aby zastosować powyższy formalizm w praktyce należy odpowiedzieć na dwa pytania:

- Jaka jest interpretacja funkcji przynależności?
- W jaki sposób można określić jej numeryczne wartości; czyli – innymi słowy – jak ją skonstruować?

Odpowiedź na powyższe pytania nie jest prosta, a odpowiedź całkowicie jednoznaczna być może nie jest w ogóle możliwa. Wynika to z wieloznaczności pojęcia zbioru rozmytego. Aby wyjaśnić ten problem posłużmy się nieco zmienionym przykładem zaczerpniętym z pracy Bilgiça i Türkşena [3]. Przyjmijmy za tymi autorami, że nieprecyzyjne określenie „Jan jest wysokim człowiekiem" opisane jest zbiorem rozmytym o funkcji przynależności $\mu(x)$ takiej, że $\mu(180) = 0,7$. Powyższy zapis oznacza, że jeżeli Jan ma 180 cm wzrostu, to jego „przynależność"

[1] *Artykuł napisany w ramach realizacji projektu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego N N519 316735.*

do rozmytego zbioru „ludzi wysokich" określona jest liczbą 0,7. Jaka może być interpretacja powyższej informacji? Bilgiç i Türkşen [3] podają *pięć* różnych możliwych interpretacji:

a) W terminach *wiarogodności*: 70% danej populacji określa Jana jako człowieka wysokiego;
b) W terminach *zbiorów losowych*: 70% danej populacji opisuje pojęcie „wysoki człowiek" za pomocą przedziału wartości zawierającego wzrost Jana (180 cm);
c) W terminach *podobieństwa*: wzrost Jana różni się (w sensie pewnej znormalizowanej odległości) od prototypowego człowieka o wzroście uznanym za na pewno wysoki w stopniu 0,3;
d) W terminach *użyteczności*: użyteczność informacji, że Jan jest wysoki wynosi 0,7;
e) W terminach *pomiaru*: gdy porównamy wzrost Jana ze wzrostem innej osoby, to stwierdzony fakt, że Jan jest wyższy od niej będzie zakodowany na pewnej skali przy pomocy liczby 0,7.

Z powyższego przykładu wynika w sposób jednoznaczny, że sposobów wyznaczania funkcji przynależności, zwanej czasami *stopniową przynależnością*, może być wiele. Odpowiednie procedury mogą mieć charakter:

a) subiektywny (ocena przez *pojedynczego* eksperta);
b) subiektywno-obiektywny (ocena na podstawie opinii zespołu ekspertów);
c) obiektywny (ocena na podstawie analizy wyników obiektywnych pomiarów).

W kolejnych sekcjach niniejszej pracy przedstawione zostaną najważniejsze problemy związane ze stosowaniem powyższych typów podejść do konstrukcji funkcji przynależności zbioru rozmytego. W ostatniej z nich zostanie zaprezentowana nowa interpretacja funkcji przynależności wskazująca na jej możliwy probabilistyczny charakter. Przyjęcie takiej interpretacji usuwa istotne wątpliwości związane z wiarogodnościową interpretacją funkcji przynależności, a co za tym idzie uzasadnia stosowanie do jej konstrukcji metod probabilistycznych.

2. Metodologiczne problemy eksperckiej oceny funkcji przynależności

Jak już wspomniano, w zdecydowanej większości prac poświęconych zastosowaniom zbiorów rozmytych przyjmuje się, że funkcja przynależności określana jest na podstawie subiektywnych ocen użytkownika (eksperta). Powstaje jednak uzasadnione pytanie, czy oceny te nie powinny spełniać pewnych wymagań, tak by podana przez eksperta ocena funkcji przynależności pewnej wielkości rozmytej nie była niezgodna z jego innymi ocenami innych podobnych wielkości. Aby uniknąć takich niezgodności *pomiary* (również te subiektywne) leżące u podstaw konstrukcji funkcji przynależności powinny spełniać pewne założone warunki. Aksjomatycznej teorii pomiaru funkcji przynależności poświęcono wiele prac, z których należy wymienić przede wszystkim prace Norwicha i Türkşena [17],Türkşena [21] oraz Marchanta [12], [13]. Prace te poświęcone są znalezieniu odpowiedzi na trzy pytania:

a) Jaka jest interpretacja znanej z teorii zbiorów rozmytych stopniowej przynależności?
b) Jak ją mierzyć?
c) Jakie operacje na funkcji przynależności należy uznać za sensowne?

Wbrew pozorom, najtrudniejszym pytaniem jest pytanie trzecie. Wynika to z tego, że teoria zbiorów rozmytych, rozumiana jako logika rozmyta, w swojej klasycznej postaci narzuca ostre ograniczenia na sposoby operowania na zbiorach rozmytych. Zgodnie z tą teorią, jeżeli A oraz B są zbiorami rozmytymi określonymi na przestrzeni rozważań X przy pomocy, odpowiednio, funkcji przynależności $\mu_A(x)$ oraz $\mu_B(x)$, to zachodzą zależności: $\mu_{A\cup B}(x)=max(\mu_A(x),\mu_B(x))$, $\mu_{A\cap B}(x)=min(\mu_A(x),\mu_B(x))$ oraz $\mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x)$, gdzie zbiór $\overline{A}$ spełnia warunek $\overline{A}\cup A=X$. Okazuje się, że dla wielu interpretacji funkcji przynależności zbiorów rozmytych powyższe warunki nie muszą być spełnione. Dotyczy to zwłaszcza interpretacji wykorzystujących pojęcie wiarogodności, które funkcji przynależności nadają sens probabilistyczny. Problemem tym zajmiemy się w dalszej części niniejszej pracy.

Począwszy od pionierskich prac Norwicha i Türkşena badacze poszukiwali odpowiedzi na pytanie dotyczące rodzaju skali pomiarowej (czyli w praktyce rodzaju pomiaru), która jest niezbędna do skonstruowania funkcji przynależności. Okazało się szybko, że prosta skala jaką jest skala porządkowa pozwala jedynie porównywać wartości przynależności, ale jest zbyt uboga, by na otrzymanych w wyniku pomiarów funkcji przynależności dokonywać operacji matematycznych. Można to dopiero zrobić, gdy pomiarów dokonuje się na skali przedziałowej, tzn. skali pozwalającej zmierzyć odległości pomiędzy wartościami funkcji przynależności. Norwich i Türkşen [17] pokazali również, że przyjęcie mocniejszej skali pomiarowej, jaką jest skala ilorazowa, prowadzi do problemów ze zdefiniowaniem funkcji przynależności zbiorów rozmytych, które powstały na drodze złożenia innych zbiorów rozmytych. Wynik ten stawia pod znakiem zapytania sensowność podejścia Saaty'ego [20], który zaproponował sposób oceny funkcji przynależności charakterystyczny dla wprowadzonej przez niego metody AHP badania preferencji.

Rozważania dotyczące skal pomiarowych były niezbędne, by można było stwierdzić, że odpowiedzi na pytania typu „W jakim stopniu obiekt *A* należy do zbioru rozmytego *F*?' lub stwierdzenia typu „Obiekt *A* jest bardziej *F* niż obiekt *B*" pozwalają wyznaczyć funkcję przynależności zbioru rozmytego. Z pytaniami i stwierdzeniami tego typu mamy do czynienia wtedy, gdy ekspert ocenia stopień przynależności *wielu* obiektów do *pojedynczego* zbioru rozmytego. Procedurę tego typu Bilgiç i Türkşen [3] nazywają właśnie *pomiarem przynależności*. Komplementarną procedurą pomiarową jest metoda nazwana przez Bilgiça i Türkşena [3] metodą *rangowania właściwości*. W tym przypadku mamy do czynienia z rozpatrywanym *pojedynczym* obiektem, który może przynależeć do *wielu* zbiorów rozmytych. Autorzy ci argumentują, że przeanalizowanie właśnie tej metody pozwala we właściwy sposób rozstrzygnąć problem konstrukcji funkcji przynależności zbiorów rozmytych powstałych w wyniku przeprowadzenia operacji logicznych na innych zbiorach rozmytych. Wyniki prac podsumowanych w publikacji Bilgiça i Türkşena [3], które dotyczyły aksjomatycznych podstaw pomiaru funkcji przynależności zbioru rozmytego, zostały rozszerzone, a czasami skorygowane, w pracach Marchanta [12], [13]. Autor ten rozpatrywał również bardziej złożone sposobu pomiaru funkcji przynależności, wykorzystujące np. opinie eksperckiego typu:

- Obiekt *x* należy bardziej do zbioru *A* niż do zbioru *B*;
- Obiekt *x* należy bardziej do zbioru *A* niż do zbioru $B\bigcup C$;
- Obiekt *x* należy bardziej do zbioru *A* niż do jego dopełnienia;
- Różnica pomiędzy przynależnością obiektu *x* do zbioru *A* a przynależnością obiektu *y* do tego zbioru jest większa niż różnica pomiędzy przynależnością obiektu *x* do zbioru *A* a przynależnością obiektu *z* do tego zbioru;

Marchant [13] rozpatrywał również problem odpowiedzi na pytania typu:

- Czy stosunek pomiędzy przynależnością obiektu x do zbioru A a przynależnością obiektu y do tego zbioru jest większy od analogicznego stosunku pomiędzy przynależnością obiektu y do zbioru A a przynależnością obiektu z do tego zbioru?
- Jaka jest wartość ilorazu wartości funkcji przynależności do zbioru A obiektów x oraz y?

Wynikiem rozważań nad metodologicznymi problemami pomiaru funkcji przynależności jest sformułowanie wielu postulatów (aksjomatów), które powinny być spełnione, by na podstawie wyników tych pomiarów można było skonstruować funkcje przynależności w taki sposób, by spełniały one postulaty teorii zbiorów rozmytych, czyli – innymi słowy – pozwalałyby na wykonywanie na nich operacji matematycznych zgodnych z założeniami logiki rozmytej. Oddzielnym problemem, znacznie trudniejszym do zrealizowania, jest weryfikacja w praktyce spełnienia tych postulatów przez poszczególnych ekspertów.

3. Metody konstrukcji funkcji przynależności

Metody konstrukcji funkcji przynależności można podzielić na dwie zasadnicze grupy: metody wykorzystujące oceny ekspertów oraz metody wykorzystujące wyniki obiektywnych pomiarów. W pierwszej grupie pojedyncze pomiary mają charakter ocen subiektywnych (ale spełniających pewne wymagania – patrz poprzednia sekcja niniejszej pracy), ale sposób ich analizy, np. przez wykorzystanie wyników ocen *wielu* ekspertów, nadaje tym metodom charakter bardziej obiektywny. Druga grupa metod ma charakter zbliżony do oceny statystycznej, przy czym nie wprowadza się założeń dotyczących probabilistycznych modeli mechanizmów generacji danych.

Prace prowadzące do opracowania metod konstrukcji funkcji przynależności były prowadzone od samego zarania teorii zbiorów rozmytych. Szczególnie wiele prac powstało w drugiej połowie lat 1970-tych oraz w latach 1980-tych, a ich wyniki były publikowane w różnorodnych czasopismach, a w tym w czasopismach z zakresu psychologii i socjologii. Bilgiç i Türkşen w swojej przeglądowej pracy [3] wymieniają następujące metody oceny (pomiaru) funkcji przynależności:

a) metoda ankietowa,
b) metoda bezpośredniej oceny,
c) metoda oceny odwrotnej,
d) metoda oceny przedziałowej,
e) metoda egzemplifikacji,
f) metoda porównania parami.

Metoda ankietowa polega na zadawaniu wielu osobom pytania typu „Czy zgadzasz się, że Jan jest człowiekiem wysokim?”. Uzyskana na podstawie tego typu eksperymentu informacja ma charakter probabilistyczny (czystościowy), ze wszystkimi tego konsekwencjami, co zostało omówione m.in. w pracy Hisdal [8]. Metoda ta ma swoje racjonalne uzasadnienie, gdy przyjmujemy wiarogodnościową interpretację funkcji przynależności.

Najprostszą metodą konstrukcji funkcji przynależności jest metoda bezpośredniej oceny. Ekspert odpowiada na pytanie typu „W jakim stopniu Jan jest człowiekiem wysokim?”. Rozróżnia się tu dwa rodzaje eksperymentu: w pierwszym *znany* jest wzrost Jana, a w drugim wzrost jest *oceniany* wizualnie przez eksperta. W przypadku tej metody zakładamy, że istnieje pewna *obiektywnie mierzalna* własność (np. wzrost) odnosząca się do opisywanego pojęcia rozmytego (np. „wysoki”). W wyniku przeprowadzonego eksperymentu uzyskuje się zbiór punktów

$(x_i, \mu^*(x_i))$, gdzie $\mu^*(x_i)$ jest punktową oceną wartości funkcji przynależności odpowiadającą wartości x_i. Powstaje oczywiście problem konstrukcji funkcji przynależności $\mu(x)$, która spełniałaby określone wymagania (np. ciągłość, normalność, wypukłość) i była zgodna z wynikami obserwacji. Zaproponowano wiele metod takiej konstrukcji, a jedną z najbardziej elastycznych jest metoda zaproponowana w pracy Medaglii i in. [14] wykorzystującej teorię krzywych Bézier.

Metoda oceny odwrotnej (patrz np. Türkşen [21]) polega na wyborze przez eksperta obiektu (spośród wielu mu przedstawionych), który najlepiej odpowiada stwierdzeniu typu „Obiekt *x* jest *F* w stopniu μ.". Metoda ta jest zalecana raczej do weryfikacji poprawności funkcji przynależności uzyskanej przy pomocy innych metod.

Metoda oceny przedziałowej polega na podaniu przez eksperta *przedziału wartości* pewnej cechy, który odpowiada ocenianemu pojęciu rozmytemu (np. „wysoki człowiek"). Ten sposób oceny jest zgodny z interpretacją funkcji przynależności w terminach zbiorów losowych. Interpretacja ta jest szczególnie ważna, gdy funkcję przynależności traktujemy jako tożsamą z funkcją rozkładu możliwości (patrz np. prace Dubois i Prade [5], [7]). Również w przypadku tej metody uzyskana ocena ma w pewnym sensie charakter probabilistyczny. Z badań eksperymentalnych opisanych w pracy Chameau i Santamariny [4] wynika, że uzyskane przy pomocy tej metody oceny rozmytości są „mniej rozmyte" (w sensie węższego nośnika funkcji przynależności) niż metody ankietowe lub metody bezpośredniej oceny.

Metoda egzemplifikacji polega na przypisywaniu (z podaniem miary przynależności) obiektów do różnych pojęć rozmytych. Metoda ta jest przydatna do weryfikacji hipotez o postaci funkcji przynależności (patrz praca Zysno [23]).

Ostatnia z wymienionych powyżej metod, metoda porównań parami, została zaproponowana przez Saaty'ego [20] i polega na porównywaniu pojęć rozmytych oraz budowaniu na podstawie tych porównań określonego rankingu. Metoda ta, podobna w swojej realizacji do wprowadzonej przez Saaty'ego metody AHP, wymaga założenia, że pomiary dokonywane są na skali ilorazowej, co jest, zdaniem Bilgiça i Türkşena [3], nieuprawnione. Metoda porównywania parami, wykorzystująca znany w psychologii probabilistyczny model BTL, została zaproponowana przez Verkuilena [22] do innej konstrukcji funkcji przynależności.

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że funkcja przynależności konstruowana jest na podstawie subiektywnych ocen ekspertów. Opracowano również metody kontrukcji funkcji przynależności na podstawie wyników obiektywnych, choć być może niedokładnych („zaszumionych"), pomiarów. W tym przypadku wyniki takich pomiarów wykorzystywane są do konstrukcji funkcji przynależności opisujących pojęcia, których dokładna definicja jest niemożliwa lub niecelowa. Z sytuacją tą mamy do czynienia np. w regułowych systemach wspomagania decyzji, w systemach rozpoznawania obrazów itp., gdzie precyzyjny (i zazwyczaj bardzo skomplikowany) opis budowanego na podstawie obserwowanych danych modelu matematycznego jest w zasadniczej sprzeczności z wymogiem jego prostej interpretowalności. Do konstrukcji funkcji przynależności, opisujących wykorzystywane w praktyce przybliżone pojęcia, stosowane są metody rozmytej analizy skupień oraz metody rozmytych sieci neuronowych. Przegląd podstawowych metod tego rodzaju można znaleźć w pracy Medasaniego i in. [15].

Najprostsze metody konstrukcji funkcji przynależności na podstawie danych korzystają ze znormalizowanych histogramów oraz zaproponowanych przez Dubois i Prade [6] przekształceń „prawdopodobieństwo – możliwość". Inną metodę przekształcenia rozkładu prawdopodobieństwa reprezentowanego przez histogramy obserwacji w rozkład możliwości opisany funkcja przynależności, zwaną metodą „zachowania niepewności”, zaproponował Klir [10].

Wśród metod bazujących na analizie skupień należy wymienić rozmyte wersje dwu znanych algorytmów: K-najbliższych sąsiadów oraz C-średnich. W metodzie rozmytych K-najbliższych sąsiadów, zaproponowanej w pracy Kellera i in. [9] przypisuje się wektory obserwacji do określonych klas. Funkcja przynależności skonstruowana na podstawie tej metody ma interpretację „odległości” od pewnego wzorca, wprowadzonej w pracy Zysno [23]. Zaproponowana przez Bezdeka [2] metoda rozmytych C-średnich służy do konstrukcji funkcji przynależności nieprecyzyjnych (rozmytych) pojęć w procesie uczenia bez nadzoru.

Do konstrukcji funkcji przynależności w procesie tzw. rozmywania danych można wykorzystać sztuczne sieci neuronowe. Wykorzystuje się tu analogię pomiędzy funkcją aktywacji neuronu a funkcją przynależności. Podstawowe wiadomości na ten temat można znaleźć w książce Kosko [11]. Bardzo dobrym źródłem wyczerpujących informacji na ten temat jest książka Rutkowskiego [18], a także książka Piegata [19].

4. Probabilistyczna interpretacja funkcji przynależności

Jak już wspomniano we Wprowadzeniu, jedną z możliwych interpretacji funkcji przynależności jest tzw. interpretacja wiarogodnościowa, która w swojej istocie jest interpretacją probabilistyczną. Hisdal [8] rozpatruje trzy źródła rozmytości o takim właśnie charakterze:

- rozmytość wynikająca z niedokładności (błędu) subiektywnego „pomiaru” rozpatrywanej wielkości;
- rozmytość wynikająca z niedokładności klasyfikacji w niedowymiarowanych lub przewymiarowanych przestrzeniach;
- rozmytość wynikająca z losowych różnic w ocenach funkcji przynależności dokonywanych przez różne osoby.

Idea związana z pierwszym typem rozmytości jest prosta. Rozmyte pojęcia lingwistyczne związane są z pewnymi cechami mierzalnymi oraz przedziałami (ostrymi!) wartości takich cech odpowiadającymi danemu pojęciu. Na przykład, pojęcie „*wysoki* mężczyzna” dotyczy osób o wzroście powyżej 180 cm. Gdyby wzrost ten był dokładnie znany, to dla oceniającej wzrost osoby pojęcie to byłoby pojęciem nierozmytym. Jeżeli jednak wzrost danego mężczyzny jest oceniany w sposób subiektywny, to istnieje rozkład prawdopodobieństwa takiej oceny. Dystrybuanta opisująca warunkowe prawdopodobieństwo (warunkiem jest tu rzeczywisty wzrost) zaliczenia danego osobnika do kategorii „*wysoki* mężczyzna” jest wg Hisdal [8] równa funkcji przynależności opisującej tę kategorie w odniesieniu do *konkretnej* osoby. Jeżeli odpowiednim wartościom granicznym, definiującym rozpatrywane pojęcie rozmyte nie da się jednoznacznie przypisać konkretnych liczb, to mamy do czynienia z równoczesnym występowaniem dwu lub więcej źródeł rozmytości. Przypadek ten rozpatrywał Beliakov [1], który przypisywał wagi różnym wartościom granicznym wielkości opisujących dane pojęcie, odpowiadającym *prawdopodobieństwu*, że określona wartość może być wartością graniczną pozwalającą jednoznacznie określić takie pojęcie. Rozkład pozwalający wyznaczyć takie prawdopodobieństwa zależy od *kontekstu*. Na przykład, inne jest prawdopodobieństwo uznania wzrostu 180 cm jako dolnej granicy definiującej pojęcie „*wysoki* mężczyzna” w przypadku koszykarzy, a inne w przypadku rozpatrywania np. gimnastyków.

Przyjęcie powyższej interpretacji funkcji przynależności opisującej zbiór rozmyty wiąże się z poważnymi trudnościami. Powstaje np. pytanie, czy na określonych w ten sposób zbiorach rozmytych można przeprowadzać operacje zgodne z logiką rozmytą Zadeha, charakteryzującą się brakiem typowej dla podejścia probabilistycznego addytywności. Trudności te powodują, że wiarogodnościowa interpretacja zbiorów rozmytych jest przez zdecydowana większość specjalistów odrzucana. Poniżej dokonamy próby rozwiązania tego problemu interpretacyjnego w odniesieniu do tych nieprecyzyjnych pojęć, które dadzą opisać się przy pomocy *liczb rozmytych*. Istotą tej nowej interpretacji jest wykazanie, że interpretacja wiarogodnościowa funkcji przynależności pozwala korzystać z zasady rozszerzenia Zadeha, będącej podstawą arytmetyki liczb rozmytych.

Oznaczmy przez $\widetilde{X}$ i $\widetilde{Y}$ dwie liczby rozmyte, których funkcje przynależności wyznaczone są w sposób jednoznaczny zbiorami odpowiednich α-przekrojów: $[x_d^\alpha, x_g^\alpha]$ oraz $[y_d^\alpha, y_g^\alpha]$. Z zasady rozszerzenia Zadeha wynika, że liczba rozmyta $\widetilde{Z} = \widetilde{X} + \widetilde{Y}$ opisana jest funkcją przynależności

$$\mu_Z(z) = \sup_{x,y:z=x+y} min[\mu_X(x), \mu_Y(y)], \tag{1}$$

w praktyce wyznaczaną przy pomocy α-przekrojów $[z_d^\alpha = x_d^\alpha + y_d^\alpha, z_g^\alpha = x_g^\alpha + y_g^\alpha]$.

Rozpatrzmy teraz stochastyczną (w sensie wiarogodnościowej interpretacji funkcji przynależności) wersję tego problemu. W celu uproszczenia prezentacji rozpatrzymy tylko lewostronne części funkcji przynależności mających interpretacje dystrybuant zmiennych losowych X_d oraz Y_d opisujących zmienne, których wartości pozwalają stwierdzić spełnienie warunków określających dolne ograniczenie liczb rozmytych $\widetilde{X}$ oraz $\widetilde{Y}$. Z zasad rachunku prawdopodobieństwa wynika, że rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z_d = X_d + Y_d$ (w przypadku zmiennych ciągłych) wyznaczany jest z zależności

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u - x) dx du, \tag{2}$$

gdzie $f(x, y)$ jest dwuwymiarową gęstością *łącznego* rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych *X* oraz *Y*. Z twierdzenia Sklara o kopułach (patrz np. książka Nelsena [16]), a także z wcześniejszych prac Frécheta i Hoeffdinga wynika, że dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (*X,Y*) spełnia następujący warunek

$$min(F(x), G(y)) \le H(x, y) \le max(0, F(x) + G(y) - 1), \tag{3}$$

gdzie *F*(*x*) oraz *G*(*y*) są, odpowiednio, dystrybuantami rozkładów brzegowych wektora losowego (*X,Y*) opisanego dystrybuantą łączną *H*(*x,y*). Ograniczenie lewostronne odpowiada sytuacji, gdy zmienne *X* oraz *Y* są w pełni zależne w sposób dodatni, zaś ograniczenie prawostronne odpowiada pełnej zależności ujemnej. Przyjmijmy teraz, że dystrybuanty *F*(*x*) oraz *G*(*y*) mają interpretacje lewostronnych części funkcji przynależności liczb rozmytych $\widetilde{X}$ oraz $\widetilde{Y}$. Ponieważ nic nie możemy powiedzieć o wzajemnej zależności związanych z tymi fragmentami funkcji przynależności zmiennych losowych X_d oraz Y_d, powinniśmy – zgodnie z posybilistyczną interpretacją zbiorów rozmytych – rozpatrzyć najbardziej niekorzystny przypadek opisywany lewą stroną nierówności (3). Można teraz w stosunkowo prosty sposób pokazać, że jeżeli *F*(*x*)=*x* oraz *G*(*y*)=*y*, czyli gdy są to dystrybuanty w rozkładzie równomiernym, dystrybuanta sumy tych zmiennej losowych ma postać

$$H(z) = \sup_{x,y:z=x+y} min[F(x), G(y)] \tag{4}$$

i odpowiada dokładnie zależności (1). Ze wspomnianego już twierdzenia Sklara o kopułach można wyciągnąć wniosek, że wynik ten można bezpośrednio przenieść (przez transformację przestrzeni zmienności zmiennych X oraz Y) na przypadek, gdy dystrybuanty $F(x)$ oraz $G(y)$ należą do tej samej rodziny rozkładów prawdopodobieństwa. Symulacje komputerowe pokazują, że zależność (4) jest także prawdziwa dla dowolnych dystrybuant $F(x)$ oraz $G(y)$. Potwierdzenie tego faktu wymaga jednak dalszych analiz.

Powyżej rozpatrzyliśmy problem interpretacji lewostronnych części funkcji przynależności opisujących zbiory rozmyte (liczby rozmyte). Części prawostronne możemy analizować w dokładnie ten sam sposób przyjmując w rozważaniach zamiast dystrybuant $F(x)$ oraz $G(y)$ odpowiadające im funkcje przeżycia $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ oraz $\overline{G}(y) = 1 - G(y)$. Również i w tym przypadku uzyskamy probabilistyczne odpowiedniki wzoru (1).

W niniejszej pracy rozpatrzyliśmy wyłącznie przypadek operacji sumowania liczb rozmytych. Wykazaliśmy, że przy przyjęciu probabilistycznej interpretacji funkcji przynależności możliwe jest przeprowadzanie operacji sumowania zgodnie z logiką rozmytą Zadeha, co nie było zauważone przez rozwijających to podejście badaczy [1],[8]. Możliwość przeniesienia uzyskanych tu wyników na przypadek dowolnych operacji na zbiorach rozmytych (liczbach rozmytych) wymaga jednak przeprowadzenia dalszych dalece nietrywialnych analiz.

Bibliografia

[1] Beliakov G.: Fuzzy sets and membership functions based on probabilities, *Information Sciences*, 91 (1996), pp. 95–111.
[2] Bezdek J.C.: Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms, Plenum Press, New York, 1981.
[3] Bilgiç T., Türkşen I.B.: Measurement of membership functions: Theoretical and empirical work. W: Fundamental of Fuzzy Sets, The Handbook of Fuzzy Sets (D.Dubois, H.Prade, Eds.), vol.7, Kluwer, Dordrecht, 2000.
[4] Chameau J.L., Santamarina J.C.: membership functions part I: Comparing method of measurement, *International Journal of Approximate Reasoning*, 1 (1987), pp. 287–301.
[5] Dubois D., Prade H.: Fuzzy sets and statistical data, *European Journal of Operational Research*, 25 (1986), pp. 345–356.
[6] Dubois D., Prade H.: Unfair coins and neccesity measures: towards a possibilistic interpretation of histograms, *Fuzzy Sets and Systems*, 10 (1983), pp. 15–20.
[7] Dubois D., Prade H.: Fuzzy sets, probability and measurement, *European Journal of Operational Research*, 40 (1989), pp. 135–154.
[8] Hisdal E.: Are grades of membership probabilities?, *Fuzzy Sets and Systems*, 25 (1988), pp. 325–348.
[9] Keller J.M, Gray M.R., Givens J.A.: A fuzzy K-nearest neighbor algorithm, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15 (1985), pp. 580–585.

[10] Klir G.: A principle of uncertainty and information invariance, *International Journal of General Systems*, 17 (1990), pp. 249–275.
[11] Kosko B.: *Neural Networks and Fuzzy Systems*, Prentice-Hall, englewood Cliffs, NJ, 1991
[12] Marchant T.: The measurement of membership by comparisons, *Fuzzy Sets and Systems,* 148 (2004), pp. 157–177.
[13] Marchant T.: The measurement of membership by subjective ratio estimation, *Fuzzy Sets and Systems,* 148 (2004), pp. 179–199.
[14] Medaglia A.L., Fang Sh-Ch, Nuttle H.L.W., Wilson J.R.: An efficient and flexible mechanism for constructing membership functions, *European Journal of Operational Research*, 139 (2002), pp. 84–95.
[15] Medasani S., Kim J., Krishnapuram R.: An overview of membership function generation techniques for pattern recognition, *International Journal of Approximate Reasoning*, 19 (1998), pp. 391–417.
[16] Nelsen, R.B.: *An Introduction to Copulas* (2^{nd} edition), Springer, New York, 2006.
[17] Norwich A.M., Türkşen I.B.: A model for the measurement of membership and the consequences of ist empirical implementation, *Fuzzy Sets and Systems*, 12 (1984), pp. 1–25.
[18] Piegat A. *Modelowanie i sterowanie rozmyte*, EXIT, Warszawa, 1999.
[19] Rutkowski L.: Metody i techniki sztucznej inteligencji, PWN, Warszawa, 2005.
[20] Saaty T.L.: Scaling the membership function, *European Journal of Operational Research*, 25 (1986), pp. 320–329.
[21] Türkşen I.B.: Measurement of membership functions and their assessment, *Fuzzy Sets and Systems,* 51 (1991), pp. 295–307.
[22] Verkuilen J.: Assigning membership in a fuzzy set analysis. *Sociological Methods & Research*, 33 (2005), pp. 462–496.
[23] Zysno P.: Modelling membership functions, W: B.B. Rieger (ed.), *Empirical Semantics* I, Brockmeyer, Bochum, 1981, pp. 350–375.

MEMBERSHIP FUNCTION OF A FUZZY SET
– METHODS OF COSTRUCTION AND INTERPRETATIO

Summary

Fuzzy sets are used as a basic tool for modelling of uncertainty and vagueness of other character than randomness. Membership function is the basic characteristic that describes the fuzzy set. In practice it is assumed that the membership function is given by a user who constructs it using available subjective and objective information. In the paper we present a short description of methods of construction and interpretation of membership functions. We present a new method for the interpretation of the membership function in the framework of the possibilistic interpretation of fuzzy sets.

Keywords: fuzzy sets, membership function, methods of construction, copulas.

Olgierd Hryniewicz
Instytut Badań Systemowych PAN
e-mail: hryniewi@ibspan.waw.pl